Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

"Magnitudes directa e inversamente proporcionales:"

"Una propuesta didáctica para 1º E.S.O."

"Directly and inversely proportional relationships:"

"A didactic proposal for 1º E.S.O."

Autor: Carlos Ena Vinués

Director: Marta Lacasa Ibaibarriaga

Facultad de Educación

Curso 2018/2019

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN:

El presente trabajo fin de Máster se encuadra como una de las asignaturas del Máster Universitario en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, Formación profesional y enseñanza de idiomas.

El objetivo principal del Máster es proporcionar al futuro profesor la adquisición de una formación especializada que le habilite para el ejercicio de la enseñanza en la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Escuelas Oficiales de Idiomas conforme a las directrices y exigencias de la ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, y el REAL DECRETO 1834/2008, de 8 de noviembre.

El trabajo que se presenta desarrolla una unidad didáctica sobre proporciones para el primer curso de la E.S.O. El objetivo final que se pretende es aunar en un solo trabajo todos los conocimientos adquiridos en el máster sobre pedagogía, innovación, evaluación y diseño de actividades.

A.SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

a) Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático que se va a estudiar en el presente trabajo va a ser la Proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes. En particular, según la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, se desarrollan los conceptos de razón, proporción y constante de proporcionalidad.

b) Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

El objeto matemático se presenta en el primer curso de la E.S.O. en la asignatura de matemáticas, en el bloque de números y algebra.

c) ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Los objetivos a alcanzar con los distintos campos de problemas y las técnicas de resolución que se van a plantear en la presente unidad son los siguientes:

- ✓ Discernir cuándo dos magnitudes están relacionadas proporcionalmente. Los alumnos deben ser capaces de deducir cuándo se cumplen unas condiciones de regularidad o linealidad, que determinan si dos magnitudes están relacionadas proporcionalmente.
- ✓ Resolver un problema sobre valor perdido en el que sea necesario calcular previamente la razón de proporcionalidad entre dos magnitudes.
- ✓ Ser capaz de establecer comparaciones, y tomar decisiones, en situaciones donde sea imprescindible calcular e interpretar la constante de proporcionalidad.
- ✓ Resolver problemas que requieran el cálculo y manejo de porcentajes. Por ejemplo, se pretende conseguir que el alumno sepa aplicar un porcentaje sobre una cantidad predefinida inicialmente, o que pueda calcular el valor inicial de una magnitud a la que se ha aplicado previamente un porcentaje.

Aunque existen muchas técnicas que resuelven los problemas que se han mencionado, en la presente unidad nos centraremos en trabajar fundamentalmente tres tipos de técnicas, que por su importancia y fácil manejo serán muy útiles a los estudiantes.

- ✓ Método de reducción a la unidad.
- ✓ Método algebraico.

- ✓ Método sobre la razón interna.

Por su parte, la tecnología que se planteará en la unidad se vertebra sobre la definición de razón de proporcionalidad. Para ello, se plantearán actividades que presenten el coeficiente de proporcionalidad como una medida de comparación multiplicativa y no aditiva.

B.SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA –APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

a) ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Generalmente, se plantea algún problema de tipo aritmético que relaciona magnitudes de uso habitual en la vida diaria del alumno (pesos, precios, tiempos…), y cuya solución puede plantearse de forma más sencilla, y eficaz, a través del manejo de las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes. Los problemas anteriores podrían solucionarse con las técnicas que el alumno ya ha visto en cursos anteriores, pero el cálculo de las constantes de proporcionalidad, a través de la reducción a la unidad, puede facilitar su resolución.

A modo de ejemplo, vemos un problema introductorio sobre proporciones en un libro de texto de primero de la ESO:

> **Fiesta de primavera**. Asistentes: 30 personas, Consumo: 2 vasos por persona. Precio: 1,30 euros la botella. Primero completa la tabla, y después contesta a la pregunta; ¿Cuántas botellas de refresco se necesitan para la fiesta?

BOTELLAS	*LITROS*	*VASOS*	*COSTE(EUROS)*
1	1,5	5	1,30
2	3	10	2,60
3			
…			
12			

(Colera y Gaztelu, 2007, p.160)

b) ¿Qué campos de problemas, técnicas, y tecnologías se enseñan habitualmente?

El campo de problemas, las técnicas y tecnologías cubren los contenidos que establece el currículo aragonés, Orden ECD/489/2016 de 26 de Mayo. En particular, razón y proporción, magnitudes directa e inversamente proporcionales, constante de proporcionalidad, cálculo de porcentajes, aumentos y disminuciones. De forma concreta encontramos los siguientes:

Campo de problemas:

- ✓ **Problemas de proporcionalidad directa de valor perdido**. En este tipo de problemas se conocen tres datos de una proporción y se debe calcular un cuarto valor desconocido. Suelen relacionar magnitudes, como por ejemplo, el espacio recorrido y el tiempo empleado, el sueldo y las horas laborales trabajadas, el número de cajas de un material y su peso, la cantidad de dicho alimento y su precio…
- ✓ **Problemas de proporcionalidad inversa de valor perdido.** Como en el caso anterior, en este tipo de problemas se conocen tres datos de una proporción y se debe calcular un cuarto valor desconocido. Suelen relacionar magnitudes, como por ejemplo, la velocidad y tiempo, el número de grifos para llenar un depósito y el tiempo empleado, el número de obreros para vallar una finca y las horas empleadas, etc. A modo de ejemplo: *"Dos operarios descargan un camión en dos horas. ¿Cuántos operarios serían necesarios para descargarlo en 1 hora? ¿Y en 40 minutos?"*(Nieto, 2007, p.152).
- ✓ **Problemas de porcentajes de aumento y descuento**. Generalmente, estos problemas están relacionados con situaciones económicas cotidianas como pueden ser: el cálculo del precio de un artículo de ropa antes o después de un descuento, el cálculo del rendimiento de un depósito bancario, el cálculo del porcentaje que mida el acierto o desacierto de un determinado deportista, etc.
- ✓ **Problemas de reparto directamente proporcional**. Habitualmente, en los libros de texto escolares, suelen ser problemas en los que se reparte cierta cantidad de dinero en función de alguna otra variable; como por ejemplo: la cantidad de trabajo realizado, la edad de los hijos a los que les transmite una herencia, o el número de partidos que juega un determinado jugador.

Técnicas:

- ✓ Regla de tres directa e inversa.
- ✓ Método de reducción a la unidad.
- ✓ Cálculo de fracciones equivalentes mediante tablas de valores.
- ✓ Utilización de la regla de tres en el cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales.

- ✓ Conversión de un porcentaje en fracción para poder emplear las operaciones con fracciones, ya conocidas por el estudiante, para la resolución de un problema.

<u>Tecnologías:</u>

- ✓ Definición de constante de proporcionalidad y de dos magnitudes proporcionales.
- ✓ Asimilar la igualdad entre porcentaje y fracción. Consecuentemente, se asimila que un porcentaje es también una proporción. A modo de ejemplo:

> Si partimos de la información: el 20% de las ovejas de un rebaño son negras, podemos construir la tabla:

Número de ovejas (TOTAL)	Número de ovejas negras (PARTE)
100	20
200	40
300	60

> Se observa entonces que se trata de una tabla de proporcionalidad directa, con el que podemos construir parejas de fracciones equivalentes. (Colera y Gaztelu, 2007, p.172)

c) ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

El alumno profundiza en una serie de competencias matemáticas que lleva trabajando desde etapas escolares anteriores. En concreto, el alumno adquiere una mayor destreza en el cálculo numérico con fracciones y números decimales, además de desarrollar una serie de técnicas y hábitos, que le permiten resolver con soltura ciertos tipos de ejercicios sobre proporcionalidad que se le presentan en los primeros cursos de la ESO.

Nuestra propuesta pretende hacer un esfuerzo por conseguir que el alumno sea capaz de asociar las ideas y conceptos sobre la razón de proporcionalidad con problemas reales que se le pueden presentar en su vida diaria. En este sentido, Godino y Batanero (2002), en su libro Proporcionalidad, afirman: "Diversas investigaciones muestran que la adquisición de destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia solo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado" (p.431).

De esta forma, con nuestra propuesta, el alumno no solo aprenderá a desarrollar técnicas y algoritmos para la resolución de ejercicios, como ocurre en la enseñanza de hoy en día en el tema sobre proporcionalidad, sino que aprenderá a utilizar una serie de herramientas sobre proporcionalidad en un contexto real determinado.

Para ello, no solo se hará hincapié en trabajar las técnicas sino que él mismo participará en su propio aprendizaje a través de actividades donde el alumno y los problemas contextualizados, que puede observar en su vida diaria, sean los protagonistas.

C.SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

a) ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para que los alumnos de primer curso de la E.S.O. adquieran los conocimientos sobre proporcionalidad que se presentan en la unidad, es fundamental que éstos tengan los siguientes conocimientos, de cursos anteriores, bien adquiridos:

- ✓ Concepto de fracción.
- ✓ Operaciones con números decimales.
- ✓ Equivalencia de fracciones y operaciones con fracciones.
- ✓ Conocer la relación que existe entre los números decimales y las fracciones. En particular, que el estudiante conozca que una fracción puede expresarse como un número decimal.
- ✓ Comparación-ordenación de medidas de una misma magnitud.

En este sentido, para que se pueda resolver adecuadamente cualquiera de los problemas de esta secuencia didáctica es imprescindible un buen manejo del cálculo de operaciones, no solo con números naturales, sino también con números racionales y decimales.

Además, para que los alumnos entiendan el concepto de razón que se explica en este primer curso de secundaria es fundamental que comprendan el significado de proporción que se presenta en cursos anteriores, vinculado a la semejanza geométrica y a todo lo que se refiere a las escalas de una figura en el plano. Sin este conocimiento, será muy difícil que los estudiantes se adentren con éxito en el tema de proporciones que establece comparaciones entre objetos heterogéneos.

b) La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Sí, puede entenderse que la enseñanza que han recibido los alumnos antes de iniciarse en el estudio de la presente unidad didáctica ha propiciado un adecuado bagaje académico, tanto conceptual como operacional, para que la enseñanza sobre proporciones tenga éxito en el primer curso de secundaria.

En primer lugar, en la etapa educativa anterior, los alumnos reciben ciertos conocimientos iniciales sobre proporciones y porcentajes. De hecho, los estudiantes que inician sus estudios de secundaria entienden el significado geométrico de proporcionalidad. Consecuentemente, comprenden el significado y la utilidad de las escalas métricas, que establecen una relación entre las unidades de longitud de un mapa y las distancias reales. En segundo lugar, como establece el currículo aragonés, tanto en los primeros meses de trabajo de primero de la E.S.O., como en el último curso de primaria, se trabaja tanto el cálculo operacional de fracciones como de números decimales. En particular, la ORDEN ECD/850/2016 de 29 de Julio que modifica la orden de 16 de Junio de 2014 del currículo de educación primaria establece los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que aparecen en la tabla que se adjunta, y que los alumnos deben manejar al terminar el último curso de primaria.

Bloques	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
BLOQUE 2: Números	Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas. .	Est.MAT.2.3.1. Reduce dos o más fracciones a común denominador y calcula fracciones equivalentes. Est.MAT.2.3.2. Redondea mentalmente números decimales a la décima, centésima o milésima más cercana en situaciones de resolución de problemas cotidianos. Est.MAT.2.3.3. Ordena fracciones aplicando la relación entre fracción y número decimal
BLOQUE 4: Geometría	Crit.MAT.4.6. Interpretar representaciones espaciales realizadas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares.	Est.MAT.4.6.1. Comprende y describe situaciones geométricas de la vida cotidiana, e interpreta y elabora representaciones espaciales (planos, croquis de itinerarios, maquetas…), utilizando las nociones geométricas básicas (Escalas, etc).

c) ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Se proponen tres actividades para una buena puesta a punto de conocimientos. Las dos primeras actividades irían destinadas a mejorar el manejo de las operaciones con números racionales y con números decimales. La tercera actividad pretende recordar los conceptos sobre proporcionalidad geométrica y la razón de semejanza que han trabajado los alumnos en los últimos cursos del ciclo anterior.

Primera actividad: Se realizan tres prácticas sobre fracciones equivalentes con el software gratuito *Khan Academy*. En principio, para que un alumno pase de una práctica a la siguiente, será necesario que obtenga una puntuación máxima de 80 puntos en el ejercicio que esté haciendo. Es decir, el estudiante no puede cometer ningún error en las cuestiones que se plantean para cada actividad, dado que si se cometiese algún fallo, se tendría que volver a repetir el ejercicio hasta estuviese perfecto. Una vez que el alumno consiga los 80 puntos, no tenga ningún error, podrá pasar a la siguiente pantalla.

La primera práctica es una batería de siete ejercicios que combinan la simplificación de fracciones con cuestiones del tipo:

$$¿\,Qué\ número\ puede\ sustituir\ a\ la\ k\ debajo?$$

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{k}$$

La segunda es una serie de siete cuestiones sobre comparación de fracciones con distintos numeradores y denominadores. A modo de ejemplo, encontramos ejercicios del estilo:

> *Compara las fracciones y completa el hueco con el signo de mayor, menor o igual que corresponda:*

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3}$$

El último ejercicio consiste en cuatro preguntas que exigen al estudiante que ordene de menor a mayor una serie de tres fracciones distintas. Por ejemplo:

> *Ordena de menor a mayor, poniendo el número más pequeño la izquierda, las fracciones:*

$$\frac{5}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}$$

<u>Segunda actividad:</u> Una vez que los estudiantes hayan acabado la primera actividad, se les proponen otras dos prácticas para seguir trabajando con *Khan academy*. En esta ocasión se les pide que trabajen la conversión de números decimales en fracciones, y al revés. Además, la dinámica de trabajo para esta actividad sigue las mismas pautas que se emplearon en el apartado anterior, es decir, para pasar de un ejercicio al siguiente no se puede cometer ningún error.

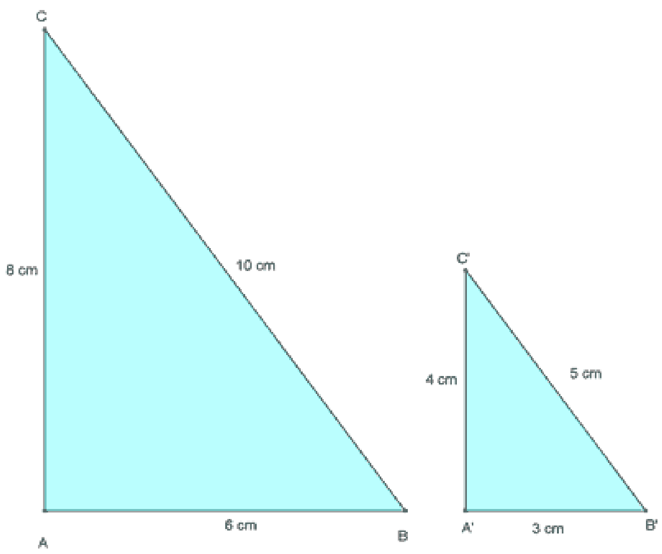
El primer ejercicio se desglosa en cuatro cuestiones de tipo test, con cuatro posibles respuestas cada una, mientas la segunda parte se compone de siete ejercicios del tipo:

¿Cuál es el decimal equivalente a $\frac{11}{25}$*? Escoge una respuesta:*

$0{,}44 \quad 0{,}\hat{4} \quad 2{,}2\hat{7} \quad 2{,}\widehat{27}$

Expresa 0.7 como una fracción:

<u>Tercera actividad:</u> Encuentra qué relación existe entre ambas figuras:



Esta actividad pretende refrescar el concepto geométrico de semejanza y proporcionalidad para preparar a los alumnos a una nueva interpretación más amplia de la razón y que se irá desgranando en la presente secuencia didáctica.

La mayor parte del trabajo de activación de conocimientos previos se realiza con la ayuda de la plataforma web *Khan Academy*. La justificación de dicha elección es porque dicho software permite que cada estudiante pueda ir a su propio ritmo. Al fin a y al cabo, en cualquier aula de matemáticas existe una gran variedad en las capacidades que muestran los estudiantes, en el ritmo de aprendizaje, en la motivación, etc. Con esta aplicación trataremos, de alguna forma, de atender de la mejor manera posible la diversidad que nos encontremos en la clase.

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

a) ¿Cuál es la razón de ser o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Para dar respuesta a la razón de ser del objeto presentado tendremos en cuenta las reflexiones de José María Gairín Sallán y Rafael Escolano Vizcarra en el artículo de la revista SUMA, Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. En dicho artículo, Gairín y Escolano (2009) afirman:

> En el ámbito educativo la razón se presenta como una idea abstracta sin relación con el mundo de las magnitudes, se presenta la razón como un número no medida, como un ente abstracto desconectado de las magnitudes; es decir, la enseñanza se ocupa solamente de los aspectos numéricos y desatiende la delimitación de la magnitud resultante y de sus unidades de medida. (p.40)

Por tanto, la razón de ser del objeto matemático que se presenta debe sostenerse sobre un aspecto esencial, la necesidad de presentar una definición rigurosa de proporcionalidad **que permita al estudiante resolver de forma más eficaz problemas corrientes de la vida diaria**. Es decir, la razón de ser sobre la que se vertebra la presente unidad es la resolución de problemas prácticos reales de la vida diaria, de mayor dificultad que los que se presentan en etapas escolares anteriores, y que para su resolución exigen incidir en el significado de la constante de proporcionalidad.

La complejidad de los ejercicios nuevos que se plantean exige la definición de nuevos conceptos que permitan al alumno disponer de nuevas herramientas, más allá de las cuentas aritméticas y las fracciones equivalentes, para su resolución de forma exitosa.

Además, se hace hincapié en presentar la constante de proporcionalidad como un ente que está relacionado con el mundo de las magnitudes, y que está muy alejado de ser una idea meramente abstracta. El alumno debe comprender que la razón de proporcionalidad no es solo una expresión numérica resultado de la división de dos números reales, sino que se trata de una medida que relaciona dos magnitudes, que se cuantifican numéricamente, y que cumplen una condición de regularidad o linealidad.

De esta forma, al finalizar la unidad didáctica que se presenta, el alumno podrá enfrentarse con éxito a los distintos tipos de problemas. Por ejemplo, será capaz de resolver:

- ✓ Discernir qué producto, entre varios artículos, es más rentable cuando no se dispone del precio de los mismos expresados en euros por unidad de peso.
- ✓ Conocer la rebaja de un artículo cuando se conoce el porcentaje que supone dicha rebaja y el precio al que se va aplicar la disminución.
- ✓ Conocer la capacidad de almacenamiento de un embalse si se conoce el agua embolsada en un determinado momento y el porcentaje, sobre el total, que supone dicha cantidad.
- ✓ Saber estimar las cantidades exactas que se van a emplear de unos determinados productos alimenticios para la preparación de una receta de cocina.
- ✓ Conocer la cantidad de dinero que un socio mercantil de una empresa va a recibir como propietario de una sociedad, en función del dinero que él mismo desembolsó para la adquisición de la participación de la sociedad.
- ✓ Si se conoce el tiempo que dura en un refugio de montaña una determinada cantidad de comida para un número concreto de personas, ser capaz de estimar cuántos días aguantará la comida cuando el número de huéspedes varía.

b) ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Históricamente, el estudio de las proporciones está enraizado en la necesidad de resolver problemas prácticos concretos. En la cultura Griega, se hicieron grandes esfuerzos en encontrar bases teóricas sólidas sobre los cálculos de proporciones que se hacían en la práctica. Estos estudios de fundamentación teórica abarcaron desde las primeras investigaciones sobre el proceso de antifairesis hasta el desarrollo de la teoría de proporciones de Eudoxo, que Euclides presenta en el libro VII de los Elementos.

Eudoxo define el concepto de razón desde un punto de vista puramente geométrico. Para ello, define los conceptos “guardar la misma razón” o “guardar una razón mayor”, sin reducir en ningún momento las relaciones a cantidades numéricas. Cabe destacar que el aunar magnitudes y números será una labor que realizará Euclides en el Libro X de los Elementos, y que pondrá énfasis en la doble realidad del objeto matemático que se presenta en el trabajo. Este estilo de trabajo es propio de los matemáticos griegos, que no concebían plausible el relacionar magnitudes que no fuesen homogéneas, al carecer de un sentido real para ellos.

No obstante, las dificultades de trabajar con magnitudes no homogéneas no impidió el avance en la resolución de problemas prácticos en otras disciplinas, como la física, donde sí se relacionaban magnitudes como el tiempo y la distancia, como se puede apreciar en el siguiente texto extraído de la Física de Aristóteles (como se citó en Caveing 1994):

> Supongamos que A es el moviente, B la cosa movida, C la distancia según la cual es movida y T el tiempo en el cual es movida. Entonces, en el tiempo T una fuerza igual a A hará que algo que es la mitad de B se mueva sobre el doble de la distancia de C, y lo hará mover sobre la distancia C en la mitad del tiempo T, pues de esta manera se mantendrá la proporción. Y si la fuerza de A hacer mover a B sobre la distancia C en tiempo T, también hará mover a B sobre la mitad de C en la mitad de tiempo T, y una fuerza igual a la mitad de A moverá a la mitad de B sobre la distancia C en el tiempo T. (p.249)

Consecuentemente, sí que coinciden la razón de ser del presente trabajo y la histórica, **en cuanto que ambos pretenden resolver problemas prácticos de la vida cotidiana**, poniendo énfasis en la idea de que la razón es algo más que una relación numérica abstracta. Ambas**,** la razón de ser histórica y la que se presenta en este trabajo, tratan de establecer un método eficaz que permite modelizar situaciones reales con las herramientas sobre aritmética y algebra, que son propias de las matemáticas, con la intención de resolver problemas reales que son útiles para nuestras sociedades.

c) Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

El buen manejo de los conceptos sobre proporcionalidad, que se enseñan en la unidad, permitirá a los alumnos resolver una serie de problemas de gran utilidad para su adecuado desarrollo personal. Además, les aportará un rico bagaje cultural que les ayudará a entender muchos de los fenómenos que ocurren a su alrededor y que, sin su comprensión, los estudiantes pueden encontrar graves problemas para su incorporación, e integración, a la sociedad en situación de normalidad.

Los problemas que constituyen la razón de ser de la unidad son los siguientes:

PROBLEMA 1: Este problema permitirá al estudiante realizar comparaciones entre cantidades de diferentes magnitudes para tomar decisiones de forma racional. El viaje de Juan.

Juan decide alquilar un coche. En una empresa de alquiler de automóviles se le entrega un folleto informativo con los tres mejores coches. Como Juan quiere ahorrar dinero, ¿cuál es el coche que elegiría?

Consumo 1000 Km Coche A		Consumo 500 Km Coche B		Consumo 1000 Km Coche C	
gasolina	84 litros	**gasolina**	45 litros	**gasolina**	60 litros
aceite	1,5 litros	**aceite**	0,8 litros	**aceite**	1,2 litros
neumático	0,1mm	**neumático**	0,075mm	**neumático**	0,09mm

Este problema permite al estudiante resolver un problema real. Se pretende que el alumno aprenda a resolver el problema de una forma natural y sencilla, para lo que se hace necesario una definición e interpretación precisa del concepto de razón entre dos magnitudes. En particular, la razón es la cantidad de una magnitud que se corresponda con una unidad de la otra.

PROBLEMA 2: Este problema permitirá al estudiante estimar cantidades de una determinada magnitud, conocidas otras dos magnitudes relacionadas proporcionalmente. El retorno de Juan.

Juan está volviendo a Zaragoza y decide hacer una parada Calatayud. Entre ambas ciudades hay una distancia de 100 km. ¿A cuanta velocidad deberá ir Juan para recorrer esos 100 km en 45 minutos? Ayúdate en la elaboración de la siguiente tabla. Rellena los huecos:

Velocidad	Tiempo
100 km/h	**60 minutos**
50 km/h	
	30 minutos

Este problema vuelve a plantear una situación corriente en la vida cotidiana de muchas personas, aunque haciendo hincapié en otro tipo de relaciones de proporcionalidad. Aquí se pretende que el alumno comprenda qué es una relación de proporcionalidad inversa y sus consecuencias. En particular, se procura que el estudiante vea que cuando una magnitud se incrementa, la otra magnitud relacionada de forma inversamente proporcional experimenta una variación en sentido contrario. Aunque por tanteo el alumno puede solucionar el problema, será necesario definir la constante de proporcionalidad inversa para trabajar de forma eficaz.

PROBLEMA 3: El siguiente problema permitirá al estudiante desenvolverse con el manejo de porcentajes. Juan por Madrid.

En una tienda de deporte, Juan ve una bicicleta de montaña que le gusta. Le dicen que cuesta 520 euros, pero que está rebajado un 21 por ciento. No obstante, sobre esa rebaja habría que añadir el IVA, que es también de un 21 por ciento. ¿Cuánto deberá pagar Juan por la bicicleta?

Dicho problema permite al estudiante resolver una situación que se le puede plantear al estudiante en su vida personal, que precisa el manejo de los porcentajes, tanto de aumento como de descuento, para su resolución.

d) Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología que se utilizará para la razón de ser pretende activar los conocimientos previos, e incentivar estrategias cognitivas que provoquen el pensamiento en el alumno. El enfoque pedagógico constructivista será nuestro guía teórico para las actividades en el aula, dado que el docente actuará de guía en el proceso de aprendizaje y el estudiante será el protagonista, quien construya los conocimientos que va a aprender.

El primer problema se trabajará al iniciarse el bloque de proporcionalidad directa, el segundo problema cuando se inicie la exposición sobre las relaciones inversamente proporcionales, y el tercero está diseñado para que los alumnos se inicien en el estudio sobre los porcentajes.

En la primera sesión de cada bloque de la unidad, proporcionalidad directa, inversa y porcentajes, el profesor presentará el problema correspondiente. A continuación, expondrá una serie de cuestiones con las que se pretende hacer visible el pensamiento del alumno. El trabajo se desarrollará en pequeños grupos de tres alumnos.

A medida que los alumnos contesten a las preguntas, el profesor intervendrá y pondrá énfasis en la necesidad de definir nuevos conceptos y estrategias que permitan resolver con éxito y rapidez las cuestiones que se plantean. Las preguntas que se les facilitarán son las siguientes:

PROBLEMA 1: Cuestiones:

1a.- ¿Qué relación existe entre los litros de gasolina consumidos y la distancia recorrida para cada uno de los coches que puede alquilar Juan?

Respuesta esperada: Si la distancia recorrida es mayor, el consumo de gasolina también es mayor.

Respuesta profesor: Si el consumo de gasolina es el mismo por cada kilómetro recorrido, la relación es de proporcionalidad directa. Es decir, si la distancia recorrida se duplica, o triplica, el consumo de gasolina será el doble, o el triple, al cumplirse una condición de regularidad, o linealidad.

1b.- ¿Qué relación existe entre los litros de aceite y la distancia recorrida?

Respuesta esperada: Si la distancia recorrida es mayor, el consumo de aceite también es mayor.

Respuesta profesor: Si el consumo de aceite es el mismo por cada kilómetro recorrido, la relación es de proporcionalidad directa. Es decir, si la distancia recorrida se duplica, o triplica, el consumo de aceite será el doble, o el triple, al cumplirse una condición de regularidad, o linealidad.

1c.- ¿Qué relación existe entre el grosor de los neumáticos y la distancia recorrida?

Respuesta esperada: Si la distancia recorrida es mayor el consumo de neumático también es mayor.

Respuesta profesor: Si el consumo de neumáticos es el mismo por cada kilómetro recorrido, la relación es de proporcionalidad directa. Es decir, si la distancia recorrida se duplica, o triplica, el consumo de neumático será el doble, o el triple, al cumplirse una condición de regularidad, o linealidad.

2.- ¿Cuántos kilómetros puede recorrer Juan con un litro de gasolina? ¿Y con un litro de aceite, o un 1 mm de consumo en el grosor de los neumáticos? ¿Cuántos litros de gasolina, aceite, o neumáticos se consumen en un kilómetro?

Respuesta esperada: Para saber los kilómetros recorridos con un litro de gasolina, aceite o 1mm de consumo en el grosor de los neumáticos, hay que dividir los kilómetros entre los litros o mm consumidos. Si queremos saber cuántos litros o mm consumimos en 1 km, hay que dividir los litros, o milímetros, entre los kilómetros.

Respuesta profesor: La respuesta a la pregunta es la razón de proporcionalidad km/litros o litros/km. Por tanto, la razón km/litros se interpreta como los kilómetros recorridos por litro de consumo, mientras la razón litros/km serán los litros consumidos por un kilómetro recorrido. Se adjuntan dos cuadros con las razones entre las magnitudes:

RAZÓN litros.mm/km	**Coche A**	**Coche B**	**Coche C**
GASOLINA	0,084 l/km	0,09 l/km	0,06 l/km
ACEITE	0,0015 l/km	0,0016 l/km	0,0012 l/km
NEUMÁTICOS	0,0001 mm/km	0,00015 mm/km	0,00009 mm/km

RAZÓN km/litros.mm	**Coche A**	**Coche B**	**Coche C**
GASOLINA	11,91 km/l	11,11 km/l	16,67 km/l
ACEITE	666,67 km/l	625 km/l	833,34 km/l
NEUMÁTICOS	10.000 km/mm	6666,67 km/mm	11.111 km/mm

4.- ¿Cuál de los coches consume más gasolina?

5.- ¿Cuál de los coches consume más aceite?

6.- ¿Cuál de los coches consume más neumático?

Respuesta esperada: El coche que más gasolina consume es el coche B, dado que en un kilómetro consume más gasolina que el resto de los automóviles. El coche que más aceite consume es también el coche B, dado que la razón de proporcionalidad kilómetros entre litros es la más elevada de todos los coches. Analizando con la misma metodología la razón de proporcionalidad entre kilómetros y consumo de neumático se concluye que el coche B es el que más consume.

En estas tres cuestiones la respuesta del profesor y la que se espera de los alumnos es la misma, dado que una vez se ha cuantificado e interpretado adecuadamente la razón la solución a las preguntas es inmediata.

PROBLEMA 2.Cuestiones:

1-¿Qué relación existe entre la velocidad que lleva Juan con el coche y el tiempo que tarda en recorrer la distancia hasta Calatayud?

Respuesta esperada: Si la velocidad que lleva Juan es el doble, el tiempo que tardará en hacer el recorrido será la mitad. Si quisiese tardar 4 veces menos en llegar a su destino, tendrá que ir 4 veces más rápido.

Respuesta profesor: La relación es de proporcionalidad inversa, si la velocidad del coche se ralentiza, yendo a la mitad de velocidad, el tiempo en hacer el recorrido será el doble. Si el coche va tres veces más rápido, entonces tardará tres veces menos en llegar al destino, y así sucesivamente. Por tanto, para que exista una relación de proporcionalidad debe cumplirse una condición, que el producto entre el tiempo necesario en hacer el recorrido y la velocidad del coche se mantiene constante.

2a.- ¿Si tarda 1 hora en hacer el recorrido cuanta velocidad tendría que llevar para llegar a Calatayud?

Respuesta esperada: Para tardar 1 hora en cubrir la distancia tendrá que ir a 100 km/h, puesto que ir a 100km/h significa que se recorren 100 km en 1 hora.

Respuesta profesor: La respuesta a la pregunta es la constante de proporcionalidad velocidad x tiempo. Ésta se interpreta como la cantidad de una magnitud, la velocidad, que se corresponde con una unidad de la otra magnitud relacionada, en nuestro caso el tiempo.

2b.- ¿Si va a 1 km/h cuánto tiempo tardará en llegar?

Respuesta esperada: Cuando va a 1 km/h, recorre en 1 hora solo 1 km, por tanto necesitará 100 horas para recorrer los 100 km, puesto que en cada hora hará una centésima del recorrido.

Respuesta profesor: La respuesta a la pregunta es la constante de proporcionalidad velocidad x tiempo. Ésta se interpreta como la cantidad de una magnitud, el tiempo, que se corresponde con una unidad de la otra magnitud relacionada, en nuestro caso la velocidad.

3.- ¿Cuál sería la velocidad necesaria para llegar a Calatayud en 15 minutos? ¿Si va a 10 km/h, cuánto tiempo necesitará para llegar a Calatayud?

Respuesta esperada: Para llegar al destino en 15 minutos tendrá que ir más rápido. Como tarda una hora si va a 100 km/h, si tiene que tardar 1/4 de hora para llegar, entonces la velocidad necesaria será 4 veces mayor que 100 km/h, es decir 400 km/h. Para el otro caso, el razonamiento sería similar, al ir más lento, en concreto una décima parte de 100 km/h, entonces tardará 10 veces más de tiempo en llegar, es decir, si en una hora recorre 10 km, para hacer los 100 km necesitará 10 horas.

Respuesta profesor: Como ambas magnitudes mantienen una relación de proporcionalidad inversa, se puede calcular la constante de proporcionalidad. En nuestro caso, dicho coeficiente asciende a 100, el producto de la velocidad por el tiempo es 100, cuya interpretación en tanto por uno permite solucionar el problema.

Primera interpretación: 100 es la velocidad necesaria en km/h para hacer el trayecto en 1 hora, es decir en 60 minutos. Luego en 15 minutos, es decir 0,25 horas, irá a 100km $\div$ $0{,}25h$ =400 km /h.

Segunda interpretación: 100 es el tiempo necesario en horas que se necesita para hacer el recorrido con una velocidad de 1 km/h. Luego si va a una velocidad de 10 km/h, tardará 100 km $\div$ 10 km/h =10 horas.

PROBLEMA 3. Cuestiones:

1.- ¿Cuánto es la rebaja?

Respuesta esperada: Se calcula el 21% sobre los 520 euros. Para ello, se divide 520 entre 100 para conocer cuántos euros suponen el 1% de descuento, y después se multiplica dicha cantidad por 21. Es decir, $520 \div 100 = 5{,}2\, euros,$ y $5{,}2 \times 21 = 109{,}2\, euros.$

Respuesta del profesor: Es un problema de proporciones, luego se tiene que localizar la razón de proporcionalidad, que en nuestro caso es el porcentaje, y plantear una proporción entre razones. Después, se resuelve una ecuación algebraica:

$$razón = \frac{cantidad\ rebajada}{cantidad\ antes\ de\ rebajar} = \frac{21}{100} = \frac{x}{520} \Rightarrow x = 520 \times \frac{21}{100}$$
$$= 109{,}2\ euros$$

2. ¿Sobre qué cantidad en euros hay que aplicar el impuesto correspondiente?

Respuesta esperada. Sobre la cantidad rebajada, es decir, sobre 520 menos 109,2 euros. Por tanto, sobre 410,8 euros hay que aplicar el impuesto correspondiente.

3. ¿Cuánto cuesta la bicicleta después de los impuestos?

Respuesta esperada: En primer lugar, se calcula el 21% sobre los 410,8 euros. Para ello, se divide 410,8 entre 100, para conocer cuántos euros suponen el 1% de descuento, y después se multiplica dicha cantidad por 21, para obtener el 21%.

$$410{,}8\ \div 100 = 4{,}108\ euros \text{ supone el } 1\%$$

$$4{,}108 \times 21 = 86{,}268\ euros \text{ supone el } 21\%$$

En segundo lugar, se suma dicho cantidad, $86{,}268\ euros,$ al precio que tenía la bicicleta después de la rebaja. Es decir, 410,8 más 86,268 euros, y se obtienen 497,068 euros.

Respuesta del profesor: Se aplican los mismos razonamientos que en la pregunta anterior, al tratarse de un problema sobre proporciones, así los cálculos serían los siguientes:

$$razón = \frac{cantidad\ rebajada}{cantidad\ antes\ de\ rebajar} = \frac{21}{100} = \frac{x}{520} \Rightarrow x = 410{,}8 \times \frac{21}{100} = 86{,}268\ euros$$

Después, se suma dicha cantidad al precio que se tenía de la bicicleta después de la rebaja. Es decir, 410,8 más 86,268 euros y se obtienen 497,068 euros.

5. ¿El problema se resolvería igual si primero se aplica el impuesto y después el descuento?

Respuesta esperada: Sí, el precio a pagar por la bicicleta sería el mismo.

Respuesta del profesor: Sí, el problema se resolvería con las mismas técnicas, si bien el docente incidirá en el siguiente aspecto: El precio a pagar por la bicicleta es menor que su valor sin aplicar las rebajas y el impuesto, a pesar de que el valor porcentual de la rebaja, el 21%, coincide con el porcentaje que supone el impuesto, también del 21%. Esto se explica por el hecho de que no es lo mismo calcular el 21% sobre 520 euros que sobre una cantidad menor. Por lo tanto, aplicar el mismo porcentaje para aumentar, y luego disminuir, una cantidad modifica la cuantía inicial sobre la que se calculan los porcentajes.

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

a) Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Los problemas que se van a trabajar están orientados a que el alumno aprenda a modelizar fenómenos cotidianos. Todas las situaciones que se les van a ir presentando a los alumnos son fácilmente reconocibles, lo que les va a permitir entender la proporcionalidad como un concepto que está presente en la naturaleza.

a.1) Tipos de problemas:

Los tipos de problemas que se van a plantear en la presente unidad cubren los tres bloques de trabajo que se van a explicar durante las diferentes sesiones, como se especifica a continuación:

BLOQUE DE LA UNIDAD	CAMPO DE PROBLEMAS
PROPORCIONALIDAD DIRECTA	1) Estudio de la condición de proporcionalidad directa. 2) Cálculo de la razón. 3) Comparación de razones. 4) Cálculo del valor perdido. 5) Repartos proporcionales.
PROPORCIONALIDAD INVERSA	6) Estudio de la condición de proporcionalidad inversa. 7) Cálculo del valor perdido.
PORCENTAJES	8) Cálculo de porcentajes.

a.2) Desglose de los problemas:

TIPO 1: ESTUDIO DE LA CONDICIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales. En caso afirmativo, indica la condición de regularidad que se debe cumplir para que esto sea posible.

a) *Lo que pagamos por comprar unos cuadernos y el número de cuadernos que compramos.*

Respuesta*: Sí, el precio de todos los cuadernos y el número de cuadernos son directamente proporcionales. Cuantas más cuadernos, más tendrá que pagar.*

Condición*: Son directamente proporcionales si todos los cuadernos tienen el mismo valor.*

b) *El número de páginas de un libro y el peso que tiene.*

Respuesta*: Sí, el peso del libro y el número de páginas son directamente proporcionales. Cuantas más páginas, más peso tendrá el libro.*

Condición: *Son directamente proporcionales si todas las páginas tienen en mismo peso.*

c) *El número de vacas que posee un granjero y la cantidad de pienso que gasta a la semana.*

Respuesta: *Sí, el número de vacas y el pienso que comen a la semana son directamente proporcionales. Cuantas más vacas, más pienso se necesitará.*

Condición: *Son directamente proporcionales si todas las vacas comen la misma cantidad de pienso.*

d) *El número de horas que estudia un alumno de 1 de la E.S.O y su altura.*

Respuesta. *No, las magnitudes no mantienen ninguna proporción, ya que no es más alto si estudia más.*

e) *El tiempo que está encendida una bombilla y el gasto de energía.*

Respuesta: *Sí, el tiempo que está encendida una bombilla y el gasto son directamente proporcionales. Cuanto más tiempo esté encendida la bombilla, más energía gastará.*

Condición: *Son directamente proporcionales si el gasto de una bombilla es uniforme durante todo el tiempo que permanezca encendida.*

TIPO 2: CÁLCULO DE LA RAZÓN EN PROPORCIONES DIRECTAS

Un atleta olímpico es capaz de correr los 100 metros lisos a una velocidad constante en tan solo 9,5 segundos. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer un solo metro? ¿Cuántos metros recorre en un segundo?

Respuesta: La distancia recorrida por el atleta y el tiempo que tarda en hacer el recorrido son dos magnitudes directamente proporcionales, dado que se recorre la misma longitud en todos los instantes de tiempo. El tiempo que tarda en recorrer 1 metro es la razón tiempo/metro, mientras los metros que recorre en 1 segundo es la razón metros/segundos.

$$Razón = \frac{tiempo}{metros} = \frac{9{,}5\ segundos}{100\ metros} = 0.095\ segundos\ tarda\ en\ recorrer\ un\ metro$$

$$Razón = \frac{metros}{tiempo} = \frac{100\ metros}{9{,}5\ segundos} = 10{,}52\ metros\ en\ un\ segundo$$

TIPO 3: COMPARACIÓN DE RAZONES

Pedro va a un supermercado a comprar patatas mallas. Las patatas aparecen envueltas en bolsas de 2, 3 y 5 kilogramos. Las primeras valen 0,995 euros el pack, las segundas 2,48 euros, y los sacos más grandes valen 3,98 euros. ¿Qué bolsa de patatas es la más rentable? ¿Cuál es la opción más cara?

Respuesta: Las cantidades en kilogramos y los euros que cuestan son magnitudes directamente proporcionales puesto que cumplen la condición de linealidad que se exige, dado que todas las patatas de la una bolsa tienen el mismo valor por kilógramo. Por tanto, en este problema el alumno debe calcular las razones entre las magnitudes que se presentan e interpretarlas adecuadamente. Puede calcular el cociente entre el peso y el coste, o al revés. En el primer caso, se obtiene una medida que representa los kilogramos de patatas que se obtienen por un euro, en el segundo caso, se calcula el dinero en euros que cuesta un kilogramo de patatas. Se adjunta una tabla con los cálculos:

	Bolsas de 2 Kg	**Bolsas de 3 Kg**	**Bolsas de 5 Kg**
Razón kg/euros	2,01 Kg/euros	1,21 Kg/euros	1,25 Kg/euros
Razón euros/kg	0,4975 euros/kg	0,826 euros/kg	0,796 euros/kg

A modo de conclusión, se comprueba que la bolsa más rentable es la que contiene 2 kg de patatas, puesto que el kilogramo es más barato que los demás, 0,4975 euros/kg. Mientras, las patatas más caras son las bolsas de tres kg, dado que el kilogramo cuesta 0,826 euros.

TIPO 4: CALCULO DEL VALOR PERDIDO

Nerea ha cobrado 100,8 euros por repartir propaganda durante cuatro días. ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar 340,2 euros?

Respuesta: El número de días que trabaja Nerea y el dinero que gana son magnitudes directamente proporcionales puesto que se presupone que todos los días gana la misma cantidad de dinero. Por lo tanto, se puede calcular la razón de proporcionalidad entre los días y los euros, que se interpretará como la cantidad de días que tiene que trabajar Nerea para ganar un euro. Si multiplicamos dicha cantidad por 340,2 euros, tendremos los días que tiene que trabajar para obtener esos ingresos.

$$Razón = \frac{4\ días}{100{,}8\ euros}$$

$$Razón \times euros = \frac{4\ días}{100{,}8\ euros} \times 340{,}2\ euros = 13{,}5\ días\ de\ trabajo$$

TIPO 5: REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Pedro regenta un refugio de montaña desde hace unos años y reparte 300 kilogramos de bebida y comida entre los huéspedes. Hay 4 habitaciones en el refugio; 2 habitaciones de 6 personas, una de 5, y otra de 3 personas. Si Pedro hace el reparto de comida de forma directamente proporcional al número de personas que hay en cada habitación, ¿cuántos kilogramos de comida le tocará a cada habitación?

Respuesta: El número de huéspedes del refugio y la cantidad de comida que se consume están relacionados proporcionalmente, dado que se presupone que el hostelero les reparte la misma cantidad. Si hay 20 personas, y todos deben recibir lo mismo, tendremos que dividir el total de comida entre el número de personas, y obtendremos los kilogramos de comida que recibe cada persona. En particular:

$$300kg \div 20\ personas = 15\ kg\ recibe\ cada\ persona.$$

Consecuentemente, las habitaciones recibirán las siguientes cantidades de comida:

Habitaciones de 6 personas:

$$15\ kg/persona \times 6\ personas = 90\ kg\ de\ comida\ para\ la\ habitación\ de\ 6.$$

Habitaciones de 5 personas:

$$15\ kg/persona \times 5\ personas = 75\ kg\ de\ comida\ para\ la\ habitación\ de\ 5.$$

Habitaciones de 3 personas:

$$15\ kg/persona \times 3personas = 45\ kg\ de\ comida\ para\ la\ habitación\ de\ 5.$$

TIPO 6: ESTUDIO DE LA CONDICIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Indica si las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales. En caso afirmativo, indica la condición de regularidad que se cumple para que esto sea posible:

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir una distancia.

Respuesta: *Sí, la velocidad del coche y el tiempo necesario en el trayecto son inversamente proporcionales. Cuánta más velocidad, menos tiempo tardará.*

Condición: *La distancia a recorrer debe ser la misma sea cual sea la velocidad.*

b) La cantidad de agua por minuto que vierte un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.

Respuesta: *Sí, son proporcionales. Cuanta más agua vierta, menos tiempo tardará en llenar el depósito.*

Condición: *El depósito de agua tiene que ser el mismo para todas las posibles situaciones.*

c) La altura y el peso de un alumno de primero de la E.S.O.

Respuesta: *No son ni directa, ni inversamente proporcionales porque a más altura no tiene que pesar menos, ni a más altura tiene que pesar más.*

d) El número de personas que se emplean para hacer un trabajo de matemáticas y el tiempo que se necesita para terminarlo con éxito.

Respuesta: *Sí, son proporcionales porque a más personas trabajando, menos tiempo se tardará en terminar el trabajo con éxito.*

Condición: *El trabajo que hace cada alumno es idéntico, no hay ningún estudiante que trabaje más que otro.*

TIPO 7: CALCULO DEL VALOR PERDIDO

En un refugio de montaña pueden vivir seis montañeros durante 12 días sin necesidad de que el camión de reparto lleve más cantidad de comida. Si llegasen tres nuevos montañeros al refugio, ¿cuántos días podrían aguantar sin solicitar más comida?

Respuesta: El número de montañeros y los días que aguantan en el refugio con una determinada cantidad de comida son magnitudes inversamente proporcionales. Para poder afirmarlo, debemos suponer que todos los montañeros comen la misma cantidad de comida al día. Por lo tanto, calculamos la constante de proporcionalidad inversa, que se puede entender de dos maneras distintas. Se puede interpretar como el número de días que aguanta la comida si hubiese un solo montañero o como el número de montañeros que habría si la comida solo durase un día. Como en el refugio hay 9 montañeros, se divide dicha cantidad entre 9, y obtenemos los días que aguantarán todos los huéspedes del refugio.

$$Constante = 12\ días \times 6\ montañeros = 72\ días\ por\ un\ montañero$$

$$número\ de\ días = \frac{72\ días\ con\ un\ montañero}{9\ montañeros} = 8\ días$$

TIPO 8: CÁLCULO DE PORCENTAJES

A. Conociendo la cantidad inicial, se deduce la cantidad final:

El pasado año, un embalse de la provincia del Sur de Andalucía estuvo al 100% de capacidad, con un total de 100.000 litros de agua embalsada en su interior. Este año solo está lleno el 60% de su capacidad. ¿Cuántos litros hay en el embalse este año?

Respuesta: *Si dividimos 100.000 litros entre 100 obtenemos los litros que suponen el 1% de la capacidad del embalse. Como solo está lleno el 60% se multiplica la cantidad anterior por 60, y tendremos el 60% que se nos pide.*

El 1% de la capacidad del embalse será: 100000 litros / 100 =1000 litros.

Así, el 60% de la capacidad del embalse será: 1000 litros x 60 = 60000 litros.

B. Conociendo la cantidad final, se deduce la cantidad inicial:

Otro embalse de la provincia está tan solo al 75% de capacidad, con 75.000 metros cúbicos de agua en su interior para el abastecimiento. ¿Cuántos litros tendrá el embalse cuando esté lleno?

Respuesta: *Si dividimos 75.000 metros cúbicos entre 75 obtenemos los metros cúbicos que suponen el 1% de la capacidad del embalse. Como el embase estará al 100% de su capacidad cuando esté lleno, multiplicaremos la cantidad anterior por 100 para obtener los litros que puede albergar como máximo el embalse.*

El 1% de la capacidad del embalse será: 75.000 litros / 100 =1.000 litros.

Así, el 100% de la capacidad del embalse será: 1.000 litros x 100 = 100.000 litros.

b) ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Las técnicas iniciales para la resolución de los problemas planteados tienen que ver con procedimientos aritméticos, y con las ideas sobre fracciones equivalentes que posee el alumno. Con el nuevo planteamiento se introduce una modificación, la definición de la razón entre dos magnitudes. Este hecho se hace con una doble finalidad. Por una parte, se define el coeficiente de proporcionalidad como un instrumento que permite resolver problemas de valor perdido de una manera ágil y eficiente. Por otra parte, como un método que les permite definir nuevas estrategias o algoritmos para la resolución de dichos problemas, como son las técnicas algebraicas.

c) Indica la metodología a seguir en su implementación.

Desde un punto de vista teórico, nuestra intervención en el aula se justifica por la teoría del conocimiento constructivista. De esta forma, el estudiante será el encargado de construir su propio aprendizaje y el profesor tendrá el rol de guía en el proceso de aprendizaje. A este respecto, el profesor gestionará el espacio, el tiempo y las preguntas necesarias para que se desarrollen las fases del aprendizaje de la forma más natural posible. En este sentido, las actividades que se presentan en al aula no solo pretenden dotar al alumno de habilidades matemáticas, sino también de otras muchas competencias que establece el currículo, con las que se pretende que el estudiante gane autonomía e independencia en su proceso de aprendizaje.

Como dice la reputada pedagoga March (2006), en su artículo Metodologías activas para la formación de competencias publicado en la revista Educatio siglo XXI:

“El modelo conductista se queda corto. La explicación cognitiva y constructivista del aprendizaje es más coherente con la naturaleza de las competencias, aprender con sentido, aprendizaje significativo, a partir de lo que se conoce, activo y con tareas reales, serán las garantías de un aprendizaje duradero” (p.41).

Para que el aprendizaje constructivista sea provechoso, se utilizarán dos metodologías propias de este modelo de enseñanza. El aprendizaje basado en problemas y el trabajo cooperativo.

- ✓ Aprendizaje basado en problemas, ABP. El estudiante aprenderá los conocimientos a través de la indagación y el trabajo a partir de problemas concretos. En primer lugar, se planteará el problema, y en segundo lugar, los alumnos formarán comunidades de investigación para encontrar la solución más idónea. En el aula seguiremos el modelo de aprendizaje ABP que plantean Morales y Landa, en el artículo publicado en la revista especializada Theoria. El proceso de aprendizaje, bajo este enfoque, debe desarrollarse en ocho fases. Morales y Landa (2004) afirman:

  Paso 1: Leer y Analizar el escenario del problema.

  Paso 2: Realizar una lluvia de ideas.

  Paso 3: Hacer una lista de aquello que se conoce.

  Paso 4: Hacer una lista de aquello que se desconoce.

  Paso 5: Hacer una lista de aquello que necesita hacerse para resolver el problema. Planear las estrategias de investigación. Es aconsejable que en grupo los alumnos elaboren una lista de las acciones que deben realizarse.

  Paso 6: Definir el problema. La definición del problema consiste en un par de declaraciones que expliquen claramente lo que el equipo desea resolver, producir, responder, probar o demostrar.

  Paso 7: Obtener información.

  Paso 8: Presentar resultados. *(p.154)*

- ✓ El aprendizaje cooperativo. El trabajo cooperativo se llevará a cabo en grupos de 3 ó 4 personas. Cada equipo tendrá un cuaderno de trabajo y se realizará una distribución rotativa de roles. El objetivo es que todos los estudiantes participen en un proceso colectivo que fomente valores como la tolerancia, el civismo y la inclusión. La ORDEN ECD/1005/2018, de 7 de junio, por la que se regulan las actuaciones de intervención educativa inclusiva, aconseja dicha metodología como actuación educativa que debe estar presente en todas las aulas de la comunidad autónoma para favorecer la respuesta educativa inclusiva.

Siguiendo a Anna La Prova (2017), en su libro La práctica del aprendizaje cooperativo: “El aprendizaje cooperativo ofrece una respuesta acertada a la necesidad de promover el crecimiento integral de la persona y crear un ambiente de inclusión en la escuelas” (p.88).

F. SOBRE LAS TÉCNICAS

a) Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

En este apartado, los ejercicios que se plantean están orientados a la puesta en escena de las técnicas que permiten resolver con éxito los problemas sobre proporcionalidad. Aparecerán tanto técnicas operacionales, referidas a las operaciones con números naturales y racionales, que serán necesarias manejar con agilidad para resolver convenientemente los ejercicios, como las técnicas propias sobre el cálculo de la razón.

Se plantea un ejercicio sobre proporcionalidad directa y otro sobre proporcionalidad inversa. Cada ejercicio se resuelve con todas las posibles técnicas que se van a utilizar para el desarrollo de la unidad, según sea el tipo de ejercicio que se trate.

EJERCICIO 1.PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Una máquina agrícola es capaz de cosechar 8 hectáreas de tierra durante 4 horas de trabajo. ¿Cuántas hectáreas se cosecharían si la máquina estuviese funcionado 1 hora? ¿Cuántas hectáreas se cosecharían si la máquina estuviese funcionado 15 horas?

Técnica. Hallar la razón de proporcionalidad: Es una técnica que nos permite conocer el valor de la razón de proporcionalidad entre dos magnitudes A y B. El método consiste en dividir las dos magnitudes relacionadas linealmente, de esta forma, según cuál sea la magnitud que haga de dividendo, o el divisor, obtendremos dos posibles razones.

- ✓ Si dividimos hectáreas entre horas trabajadas obtenemos la cantidad de unidades de A, hectáreas de tierra, que se corresponde con una unidad de B, una hora de trabajo.

$$Razón = \frac{A}{B} = \frac{8\ hectareas}{4\ horas} = 2\ hectáreas\ cosechadas\ en\ una\ hora$$

- ✓ Si dividimos horas trabajadas entre hectáreas obtenemos la cantidad de unidades de B, horas trabajadas, que se corresponde con una unidad de A, hectáreas de tierra.

$$Razón = \frac{B}{A} = \frac{6\ horas}{8\ hectareas} = \frac{4}{8} = 0{,}5\ horas\ de\ trabajo\ por\ una\ hectárea$$

Técnica. Reducción a la unidad: Una vez calculada la razón de proporcionalidad entre dos magnitudes que cumplen la condición de regularidad lineal, es sencillo calcular la cantidad a la que asciende una de las magnitudes. Por ejemplo, el número de hectáreas, magnitud A, si se conoce el número de horas, 15 horas, magnitud B. Si en una hora el número de hectáreas cosechadas es de $\frac{8}{4}$, y existe una relación de tipo proporcional, en 15 horas habrá $\frac{8}{4}x15$ hectáreas.

$$Cantidad\ a\ estimar\ de\ la\ magnitud\ A\ = Razón\ \times\ valor\ de\ la\ magnitud\ B$$

$$Número\ de\ hectáreas = \frac{8}{4} hectáreas/\ hora \times\ 15\ horas = 30\ hectáreas$$

Técnica algebraica: La técnica se sostiene sobre una propiedad fundamental que cumplen las magnitudes proporcionales, **la equivalencia, o proporción, entre razones**. De esta manera, se puede calcular de forma directa el valor de cualquiera de las magnitudes, en relación lineal, si conocemos el valor de la otra.

$$Razón = \frac{Cantidad\ de\ la\ magnitud\ A}{Cantidad\ de\ la\ magnitud\ B} = \frac{X}{Cantidad\ conocida\ de\ B} \Rightarrow$$

$$X = \frac{Cantidad\ de\ la\ magnitud\ A \times Cantidad\ conocida\ de\ B}{Cantidad\ de\ la\ magnitud\ B}$$

$$\frac{8\ hectareas}{4\ horas} = \frac{X}{15\ horas} \Rightarrow X = \frac{8\ hectáreas \times 15\ horas}{4\ horas} = 30\ hectáreas$$

Técnica. Razón interna: Se calcula el cociente entre los valores de una determinada magnitud, por ejemplo las horas, y calculamos el valor perdido que se nos pida con el producto de dicho cociente por el dato conocido de la otra magnitud.

$$Valor\ pérdido = \frac{Valor\ de\ la\ magnitud\ B\ en\ situación\ 2}{Valor\ de\ la\ magnitud\ B\ en\ situación\ 1} \times Valor\ conocido\ de\ A\ en\ situación\ 1$$

$$Valor\ pérdido = \frac{15\ horas}{4\ horas} \times 8\ hectáreas = 30\ hectáreas$$

EJERCICIO 2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

<u>Ejercicio 2.1</u>. 5 obreros son capaces de levantar un muro en 10 días. ¿Cuántos días se tardarán en levantar el muro si tenemos trabajando solo a un obrero?

Técnica. Hallar la constante de proporcionalidad inversa. Es una técnica que nos permite conocer el valor de la constante de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes A y B. El método consiste en multiplicar las dos magnitudes inversamente proporcionales, en nuestro caso días de trabajo y obreros, y obtener la cantidad de unidades de la magnitud A, días de trabajo, que se corresponden con una unidad de la magnitud B, número de obreros.

$$Constante = cantidad\ de\ la\ magnitud\ A \times cantidad\ de\ la\ magnitud\ B$$
$$= 10\ días\ \times 5\ obreros = 50\ días\ de\ trabajo\ para\ un\ obrero$$

Dicha constante también puede interpretarse, según cuál sea el contexto del problema, como la cantidad de unidades de la magnitud B, número de obreros, que se corresponden con una unidad de la magnitud A, días de trabajo.

Ejercicio 2.2. 5 obreros son capaces de levantar un muro en 10 días. ¿Cuántos obreros se necesitarán si se trabajase dos días?

Técnica. Reducción a la unidad: Una vez calculada la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes que cumplan la condición de ser inversamente proporcionales, es sencillo calcular la cantidad de una de las magnitudes. Por ejemplo, se puede calcular el número de días trabajados, cantidad de magnitud A, si se conoce la cantidad de magnitud B, número de obreros. En particular, si un obrero necesita 50 días de trabajo para acabar el muro, dos obreros necesitarán la mitad, es decir, $50 \div 2$=25 días.

$$Valor\ a\ estimar\ de\ la\ magnitud\ A$$
$$= Constante\ de\ proporcionalidad \div\ valor\ de\ la\ magnitud\ B$$

$$Número\ de\ días\ trabajados =\ 50 \div\ 2 = 25\ Días$$

b) ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Se ejercitan tres técnicas en la secuencia didáctica que se presenta, y que están destinadas a la resolución del campo de problemas.

- ✓ El método de reducción a la unidad.
- ✓ El método algebraico.
- ✓ El método de la razón interna.

Aunque la regla de tres es una herramienta útil para la resolución de problemas sobre proporciones, en la presente unidad no se enseña. La principal causa es que dicha técnica carece de valor intuitivo y no es adecuado que se presente en los primeros cursos de la E.S.O, en los que los alumnos se están iniciando en el estudio de las proporciones.

En mi opinión, la técnica de reducción a la unidad es la más importante de todas las que se exponen en la unidad, puesto que pone énfasis en el cálculo de la razón de proporcionalidad entre dos magnitudes distintas. De hecho, esta técnica subraya cuál es el concepto de razón, la cantidad de objetos de una magnitud A que se relacionan con la cantidad de objetos de una magnitud B. De esta forma, cuando un alumno resuelve los problemas con dicha técnica, no solo está solucionando los problemas, sino que está entrando en el significado más profundo de la proporcionalidad entre dos magnitudes.

Para los problemas sobre proporcionalidad inversa solo se presentan técnicas de reducción a la unidad. Dada la dificultad añadida que supone, en este tipo de problemas, interpretar adecuadamente la constante de proporcionalidad, se propone que el alumno solo trabaje dicha técnica con la intención de que se habitúe al razonamiento en tanto por uno.

Además, algunas técnicas, como por ejemplo el método algebraico, exigen ciertos conocimientos de álgebra para su aplicación. Se trata de un inconveniente puesto que los alumnos del primer curso no tienen todavía la soltura suficiente como para desenvolverse con eficacia en este campo. Esto se debe a que los estudiantes no han visto ningún tema sobre álgebra cuando se presentan las proporciones, y si lo han visto, todavía no han interiorizado suficientemente los conceptos.

c) Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas servirán para resolver los problemas de forma eficaz. Planteamos un cuadro que relaciona las técnicas expuestas con los problemas que solucionan.

BLOQUE DE LA UNIDAD	CAMPO DE PROBLEMAS	TÉCNICAS
PROPORCIONALIDAD DIRECTA	1) Estudio de la condición de proporcionalidad directa. 2) Cálculo de la razón. 3) Comparaciones de razones. 4) Cálculo del valor perdido. 5) Repartos proporcionales.	a) Cálculo de la razón. b) Reducción a la unidad. c) Método algebraico. d) Razón interna.
PROPORCIONALIDAD INVERSA	6) Estudio de la condición de proporcionalidad inversa. 7) Cálculo del valor perdido.	a) Cálculo de la constante proporcional. b) Reducción a la unidad.
PORCENTAJES	8) Cálculo de porcentajes.	e) Método algebraico. f) Reducción a la unidad.

d) Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Una vez que los problemas se han planteado en clase, los alumnos, en pequeños grupos, indagarán sobre la técnica que les permitirá resolver el problema. Cuando el profesor considere que los alumnos han trabajo bien esta parte y se han planteado las diferentes opciones para la elaboración de una técnica, éste expondrá en la pizarra los diferentes métodos de resolución. Después, los alumnos se ejercitarán con los ejercicios haciendo hincapié en que trabajen el cálculo mental en el uso de las técnicas.

G. SOBRE LAS TÉCNOLOGIAS

a) ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

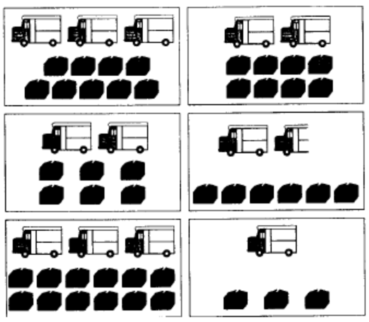
La tecnología de toda la unidad se vertebra sobre el concepto de razón. Dada la edad de los alumnos no se van a justificar las técnicas empleadas de una manera rigurosa. Se pretende únicamente que el alumno comprenda, por una parte, el significado de la razón entre dos magnitudes como una medida de comparación multiplicativa y no aditiva, y por otra que sea capaz de interpretar el coeficiente de proporcionalidad como una tasa comparativa en tanto por uno que se mantiene constante, cuando las magnitudes cumplen una condición de regularidad o linealidad.

Con dichos conocimientos, el alumno será capaz de entender y validar las diferentes técnicas que se presentaron en el apartado anterior.

Para la adquisición de dichos conocimientos se llevarán a cabo las siguientes actividades:

Actividad 1: Fijándote en el dibujo que se presenta a continuación, contesta a las siguientes preguntas:

Calcula la razón entre el número de cajas y de camiones que contienen cada ficha. Cuando la razón sea la misma, une cada camión con las cajas que sean necesarias para que cada camión este unido al mismo número de cajas, y no sobre ninguna caja y ningún camión. ¿Cómo puede interpretarse la razón para aquellas figuras idénticas, en términos de número de cajas por camión?



El objetivo de esta actividad es que los alumnos asemejen el concepto de razón al de una tasa entendida en tanto por uno. Además los estudiantes aprenderán a discernir entre dos tipos de relaciones comparativas:

- ✓ Las relaciones entre dos magnitudes en términos aditivos, como la que existe entre las dos primeras fichas de la primera fila. Para un camión más existe una caja adicional.
- ✓ Las relaciones en términos multiplicativos, para cada camión adicional existen tres cajas más. Sobre este tipo de relaciones se sostiene el concepto de razón sobre el que se trabaja la unidad.

Actividad 2: Se realiza una actividad en la sesión 6 de nuestra temporalización con planchas de corcho y palillos. El objetivo es dotar de un sentido intuitivo, y no tan numérico, al concepto de razón de proporcionalidad directa.

Actividad 3: Se les entrega a los alumnos una cartulina. Se les explica que 4 personas en 2 horas son capaces de pintar la cartulina entera de un determinado color. Los alumnos deben contestar a las siguientes preguntas, haciendo uso solo de un lápiz y una regla:

I. ¿Cuánta cartulina pintarán los cuatro pintores en 1 hora? Ráyala con el lápiz.

II. ¿Cuánta cartulina pintará un pintor en una hora? Ráyala con el lápiz.

El objetivo de la actividad es que los alumnos entiendan el significado, en tanto por uno, de la constante de proporcionalidad inversa. Para ello, se pretende que el estudiante asemeje el concepto de coeficiente de proporcionalidad al de una partición de una cantidad en tantas filas y columnas como indican las magnitudes relacionadas proporcionalmente. En nuestro caso, la relación entre las 4 personas y las 2 horas da lugar a una subdivisión en 8 porciones iguales, 4 filas y 2 columnas, de la cartulina. Como cada una de las particiones equivale al área de la cartulina que pinta un pintor en una hora, se comprueba fácilmente que se necesitan 8 horas si solo hay un pintor. Equivalentemente, se necesitarán 8 pintores si sólo hay una hora para pintar la cartulina.

b) ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Los alumnos serán los encargados, a través de un aprendizaje activo, de ir construyendo las justificaciones de cada técnica, a través de las actividades y problemas que se plantean. El profesor será el guía del proceso y, en última instancia, presentará a modo de corolario las diferentes justificaciones a las técnicas.

c) Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Después de la exposición de las técnicas, su justificación y el campo de problemas, los alumnos deben manejar:

- ✓ Concepto de razón, entendida en tanto por uno, y la noción de proporción entre razones.
- ✓ Concepto de constante de proporcionalidad inversa, entendida en tanto por uno, y de proporción entre constantes de proporcionalidad.
- ✓ Resolver problemas con el método de reducción a la unidad o el método algebraico.

d) Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Las actividades que se han expuesto en el trabajo se presentan a la par que se resuelven los problemas que se plantean en la razón de ser. Como en todo el desarrollo de la unidad se utilizarán las ventajas del aprendizaje cooperativo.

H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

a) Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

La unidad didáctica se va a desarrollar en trece sesiones e irían destinadas a cubrir los tres bloques de trabajo que se pretenden explicar: la proporcionalidad directa, inversa y el cálculo de porcentajes. La distribución de las sesiones será la siguiente:

Bloques de Trabajo	Sesiones
Proporcionalidad directa	Sesión 1,2,3,4,5,6
Proporcionalidad inversa	Sesión 7,8,9
Cálculo de porcentajes	Sesión 10,11
Repaso, prueba escrita	Sesión 12,13

A continuación, se van a desgranar las actividades y contenidos que se van a realizar en cada una de las sesiones que se han propuesto:

<u>SESIÓN 1ª:</u>

Objetivos:

- ✓ Evaluar los conocimientos previos y entender qué significado tiene que dos magnitudes estén en relación de proporcionalidad directa.
- ✓ Identificar qué condición de regularidad, o linealidad, debe tener dos magnitudes para estar en proporción directa.

Actividades:

<u>Actividad 1:</u> En primer lugar, se hace una evaluación previa sobre los conocimientos que debe tener el alumno para empezar la unidad de proporcionalidad. Se trata de que los alumnos refresquen determinados conceptos sobre fracciones, números decimales y proporcionalidad geométrica, con la realización de las tres actividades previas detalladas en el apartado C.

<u>Actividad 2:</u> En segundo lugar, se plantea el problema 1 sobre la razón de ser con la intención de resolver la primera cuestión que sigue a dicho problema, y que se detalla

en la metodología. Una vez que los estudiantes han comprendido la relación que existe entre las magnitudes distancia recorrida y consumo de gasolina-aceite-neumáticos, se plantean los problemas sobre el estudio de la condición de proporcionalidad (Tipo 1). En particular, además de resolver las cuestiones sobre condiciones que aparecen en el campo de problemas y en la razón de ser, se resuelven otras cuestiones que se detallan a continuación:

Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales. En caso afirmativo, indica la condición de regularidad que se cumple para que esto sea posible:

a) El número de bombones y el número de cajas de bombones que tengo.

   Respuesta*: Sí, son directamente proporcionales, cuantas más cajas, más bombones.*

   Condición*: El número de bombones que hay en cada caja debe ser el mismo.*

b) Las hojas que mecanografía Manolo y el tiempo en horas que esta mecanografiando.

   Respuesta*: Sí, son directamente proporcionales, cuanto más tiempo, más hojas mecanografiadas.*

   Condición*: Manolo mecanografía el mismo número de hojas en cada hora.*

c) Los gramos de sal que hay en el agua del mar.

   Respuesta*: Sí, son directamente proporcionales, cuanto más agua, más sal se puede encontrar.*

   Condición: *Son directamente proporcionales siempre que la cantidad de sal esté distribuida de forma homogénea en el agua del mar.*

d) Los goles que mete tu equipo de futbol en un partido y las faltas recibidas.

   Respuesta*: No, son directamente proporcionales. Cuando nuestro equipo recibe un número de faltas determinado no siempre se mete un determinado número de goles.*

e) El número de cocos que compro y el precio que pago por ellos.

   Respuesta*: Sí, son directamente proporcionales, cuantos más cocos, más hay que pagar.*

***Condición**: Todos los cocos deben valen el mismo número de euros.*

<u>SESIÓN 2ª:</u>

Objetivos:

- ✓ Ser capaz de calcular la razón de proporcionalidad entre dos magnitudes e interpretar adecuadamente su significado.

Actividades:

<u>Actividad 1:</u> Se vuelve nuevamente al problema 1 sobre la razón de ser con la intención de resolver la segunda cuestión que se detalla en la metodología. Se pretende que el alumno, una vez que ha comprendido cuando dos magnitudes mantienen una relación de linealidad, sea capaz de calcular la razón de proporcionalidad directa entre dos magnitudes e interpretarla adecuadamente. Para dicho fin, también **se resuelve la primera actividad introductoria que se detalla en el apartado sobre tecnologías.**

<u>Actividad 2:</u> Se resuelve el problema sobre cálculo de razones, que aparece como Tipo 2 en el campo de problemas, y la cuestión 2 del problema 1 sobre la razón de ser. Por último, se resuelven las siguientes cuestiones:

a) *Si tengo 24 bombones y 4 cajas de bombones. ¿Cuántos bombones hay en una caja?*

   ***Respuesta**: Me están preguntando por la razón de proporcionalidad directa, número de bombones por una caja.*

$$Razón = \frac{24\ bombones}{4\ cajas} = 6\ bombones\ por\ caja$$

b) *Si por cada 10 litros de agua de mar tengo 5 gramos de sal, ¿cuántos gramos de sal hay en un litro de agua? ¿cuántos litros de agua hay por un gramo de sal?*

   ***Respuesta**: Me están preguntando por la razón de proporcionalidad directa, número de gramos de sal por un litro de agua.*

$$Razón = \frac{5\ gramos}{10\ litros\ agua\ mar} = 0{,}5\ gramos\ \ por\ litro$$

$$Razón = \frac{10\ litros\ agua\ de\ mar}{5\ gramos} = 2\ litros\ por\ 1\ gramo$$

SESIÓN 3ª:

Objetivos:

- ✓ Iniciarse en el estudio de problemas sobre comparaciones entre razones. El alumno aprenderá a discernir cuál es la mejor, o peor, situación entre varias alternativas que requieran un estudio sobre proporcionalidad directa.

Actividades:

Actividad 1: Se termina de resolver el problema 1 sobre la razón de ser, en particular las cuestiones 3, 4, y 5 que se detallan en la metodología. Se pretende que el alumno, una vez que ha comprendido cuándo dos magnitudes mantienen una relación de linealidad y ha cuantificado dicha relación con el coeficiente de proporcionalidad, es capaz de utilizar adecuadamente los instrumentos que ha aprendido para comparar y tomar decisiones en situaciones en las que existen magnitudes relacionadas proporcionalmente.

Actividad 2: Se resuelve el problema tipo 3, que aparece en el campo de problemas, y además se contestan a las siguientes cuestiones:

a) *En la liga española de fútbol, un jugador marca 12 goles cada 30 partidos y otro jugador anota 4 goles en 8 partidos. ¿Qué futbolista es más efectivo para su equipo?*

   Respuesta: *Para saber qué jugador es más efectivo, deberemos comparar los goles que mete uno y otro en un único partido.*

   El primero marca $\frac{12}{30} = 0{,}4$ *goles por partido.*

   El segundo marca $\frac{4}{8}$ *=0,5 goles por partido.*

   Por tanto, el segundo jugador es más efectivo.

b) *¿Qué camiones llevan más cajas, 4 camiones que llevan 20 cajas, o 6 camiones que llevan 30 cajas?*

   Respuesta: *Para saber qué camión lleva más cajas, deberemos comparar las cajas que lleva un único camión.*

   El primer grupo de camiones lleva $\frac{20}{4} = 5$ *cajas por camión.*

El segundo grupo lleva $\frac{30}{6}$ *=5 cajas por camión.*

Por tanto, los dos camiones llevan el mismo número de cajas.

SESIÓN 4ª:

Objetivos:

- ✓ Aprender a resolver problemas sobre valor perdido y problemas sobre repartos.

Actividades: Una vez que los alumnos han cuantificado la razón de proporcionalidad y han entendido su significado, es el momento de que se enfrenten a problemas sobre el valor perdido y sobre repartos directamente proporcionales. Se solucionarán los problemas tipo 4 y 5, que aparecen en el campo de problemas, y el ejercicio que aparece descrito en las técnicas. Se hará uso de todas las metodologías que se trabajan en la presente unidad, es decir, el método de reducción a la unidad, el algebraico y el de la razón interna.

SESIÓN 5ª:

Objetivos:

- ✓ Repasar los distintos conceptos vistos sobre la proporcionalidad directa.

Actividades: Se plantea una batería de ejercicios para que los alumnos aprendan a identificar el tipo de problema que tienen que solucionar, y que elijan el método, o la técnica, más adecuada. Los ejercicios serán los siguientes:

a) *Si 12 litros de aceite valen 72 euros, ¿cuántos litros compraré con 6 euros?*

Respuesta: *Los litros y los euros son magnitudes directamente proporcionales, luego aplicamos el método de reducción a la unidad.*

$$\text{Razón}=\frac{12\ litros}{72\ euros}=\frac{1}{6}\ litros\ puedo\ comprar\ con\ un\ euro$$

$$\text{Así, con 6 euros podré comprar: 6 euros} \times \frac{1}{6}\ \frac{litros}{euro} = 1\ litro$$

b) *Si hemos comprado 3 kg de peras y nos han costado 4,80 euros, ¿cuánto costarán 5 kg de peras?*

Respuesta: *Los kilogramos y los euros son magnitudes directamente proporcionales, luego aplicamos el método de reducción a la unidad.*

$$\text{Razón}=\frac{4{,}8\ euros}{3\ Kg}=1{,}6\ euros\ vale\ un\ kilogramo$$

$$Así,\ \ 5kilogramos\ costará{:}\ 1{,}6\ \frac{euros}{kg} \times 5kg = 8\ euros$$

c) *Si una máquina produce 30 piezas en 6 minutos, ¿cuántas piezas producirá en 9 minutos?*

Respuesta: *El tiempo y el número de piezas son magnitudes directamente proporcionales, luego aplicamos el método de reducción a la unidad.*

$$Razón = \frac{30\ piezas}{6\ minutos} = 5\ piezas/minuto$$

$$Así,\ \ en\ 9\ minutos\ producirá{:}\ 5\ \frac{piezas}{minuto} \times 9minutos = 45\ piezas$$

SESIÓN 6ª:

Objetivos:

- ✓ Darle un sentido intuitivo, y no tan numérico, al concepto de razón de proporcionalidad directa.

Actividad:

El profesor les muestra una plancha de 16 cm^2 y 32 palillos incrustados uniformemente a lo largo y ancho del corcho.

Después reparte a cada equipo una caja de palillos de 400 unidades, una plancha de corcho para manipular de 121 cm^2, y una ficha a cumplimentar con las siguientes preguntas o indicaciones:

- ✓ ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el número de palillos y los centímetros cuadrados de la plancha que muestra el profesor?
- ✓ Construye una tabla de 1 cm^2 que mantenga la proporción directa número palillos-cm^2 con la tabla de muestra que enseñó el profesor. Recuerda que los palillos se deben distribuir de forma homogénea por la superficie. Después, con la misma metodología, monta una tabla de 8 palillos que tenga la misma razón de proporcionalidad que las dos planchas anteriores. ¿Qué similitudes encuentras entre las tres tablas?
- ✓ Construye, de la misma forma, otras tres planchas de 1, 9 y16 cm^2que estén en proporción directa entre ellas, pero con una razón diferente a las construidas en el apartado anterior. Después agrupa las seis tablas en dos filas de tres, donde

cada columna contenga dos tablas con la misma superficie pero distinta razón de proporcionalidad.

Contesta a las preguntas:

a) Fijándote en las tablas alineadas por filas, explica con tus propias palabras ¿qué es la razón de proporcionalidad? ¿qué significa que la razón entre dos magnitudes esté en proporción?
b) Fijándote en las tablas alineadas por columnas ¿cómo explicarías con tus propias palabras que la razón entre dos magnitudes no esté en proporción?

Respuesta esperada:

¿Qué es la razón de proporcionalidad?

La razón de proporcionalidad es una medida de densidad entre dos magnitudes.

¿Qué significa que la razón entre dos magnitudes esté en proporción?

Las dos magnitudes se distribuyen de forma uniformemente similar. Por cada unidad de superficie, se visualiza el mismo número de palillos. Tienen la misma densidad.

¿Qué significa que la razón entre dos magnitudes no esté en proporción?

Una plancha es más densa que la otra. No se distribuyen con la misma uniformidad. Por cada unidad de superficie no se visualiza el mismo número de palillos.

<u>SESIÓN 7ª:</u>

Objetivos:

- ✓ Entender qué significado tiene que dos magnitudes estén en relación de proporcionalidad inversa.
- ✓ Introducir la noción de constante de proporcionalidad inversa.

Actividades: Se plantea el problema 2 sobre la razón de ser con la intención de resolver la primera cuestión que sigue a dicho problema y que se detalla en la metodología. Una vez que los estudiantes han comprendido la relación que existe entre las magnitudes velocidad y tiempo, se resuelven los problemas sobre el estudio de la condición de proporcionalidad inversa (Tipo 6). Con anterioridad, también se resuelve la tercera actividad que se detalla en el apartado sobre tecnologías.

SESIÓN 8ª:

Objetivos:

- ✓ Ser capaz de calcular la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes e interpretar adecuadamente su significado.

Actividades: Se cuantifica la constante de proporcionalidad, resolviendo la cuestión 2 del problema 2 sobre la razón de ser. Además, para seguir practicando, se resuelven las siguientes cuestiones que tratan cuantificar la constante de proporcionalidad inversa:

a) *Si 5 obreros tardan 3 días en construir un muro, ¿cuánto tardará un obrero?*

Respuesta: *Como el número de obreros y los días necesarios para la construcción del muro son magnitudes inversamente relacionadas, si cinco obreros tardan 3 días, un obrero necesitará cinco veces más de tiempo.*

$$Constante\ de\ proporcionalidad:$$

$$3\ días \times 5\ obreros = 15\ dias\ para\ un\ obrero.$$

b) *Si 8 grifos llenan un depósito en 2 horas, ¿cuánto tiempo necesita un grifo?*

Respuesta: *Como el número de grifos y las horas necesarias para llenar el depósito del muro son magnitudes inversamente relacionadas, si 8 grifos tardan 2 horas, un grifo necesitará ocho veces más de tiempo.*

Constante de proporcionalidad:

2 horas×8 grifos=16 horas para un solo grifo.

SESIÓN 9ª:

Objetivos:

- ✓ Aprender a resolver problemas sobre el valor perdido en problemas sobre proporciones inversas.

Actividades: Se termina de resolver el problema 2 sobre la razón de ser, en particular la tercera cuestión, y se resuelve tanto el problema de tipo 7, que aparece en el campo de problemas, como el ejercicio 2 que se presenta en el epígrafe sobre las técnicas. Además, se trabajan los siguientes ejercicios sobre proporcionalidad inversa:

a) *Si 5 obreros tardan 3 días en construir un muro, ¿cuánto tardará tres obreros?*

   Respuesta: *Se emplea el método de reducción a la unidad**.** Como un obrero tarda 15 días, 3 obreros tardarán* $15 \div 3 = 5\ días$.

b) *Si 8 grifos llenan un depósito en 2 horas, ¿cuánto tiempo necesitan dos grifos?*

   Respuesta: *Se emplea el método de reducción a la unidad. Como un grifo tarda 16 horas, 2 grifos tardarán* $16 \div 2 = 8\ horas$.

SESIÓN 10ª:

Objetivos:

- ✓ Identificar un problema sobre cálculo de porcentajes como un problema sobre proporcionalidad directa.
- ✓ Ser capaz de cuantificar cuánto supone un porcentaje sobre una determinada cantidad.

Actividades:

Actividad 1: Se plantea el problema 3 sobre la razón de ser con la intención de resolver las cuestiones que siguen a dicho problema y que se detallan en la metodología. Se debe hacer hincapié en que la resolución de este tipo de ejercicios sobre porcentajes exige el mismo tipo de técnicas que las empleadas en la unidad hasta el momento.

Actividad 2: Se resuelve el problema tipo 8 A), y se plantean una serie de ejercicios, que se detallan a continuación, para que los estudiantes trabajen y practiquen con el cálculo de porcentajes.

a) *Un ordenador vale 550 euros y me dicen que hay una rebaja del 11% sobre el precio. ¿Cuánto es el descuento?*

   Respuesta: *Como es un problema de proporcionalidad directa, se aplica el método de reducción a la unidad.*

   El 1% de los 550 euros que cuesta el ordenador ascenderá a:

   550 euros/ 100 =5,5 euros.

Así, el 11% del descuento será: 5,5 euros x 11 = 60,5euros.

b) *Un nadador tiene que recorrer 250 metros para una competición. En la primera parte recorre el 65% del recorrido, ¿cuánta distancia ha recorrido?*

Respuesta: *Como es un problema de proporcionalidad directa, se aplica el método de reducción a la unidad.*

El 1% de los 250 metros que recorre el nadador ascenderá a:

250 metros/100= 2,5 metros.

Así, el 65 % del recorrido ascenderá a: 2,5 euros x 65 =162,5 metros.

<u>SESIÓN 11ª:</u>

Objetivos:

- ✓ Ser capaz de calcular la cantidad inicial de una magnitud sobre la que se ha aplicado previamente un determinado porcentaje, conocida la cantidad final.
- ✓ Repasar conceptos generales sobre toda la unidad.

Actividades:

<u>Actividad 1:</u> Se resuelve el problema tipo 8 B), haciendo un análisis comparativo entre la metodología que se emplea para la resolución del mismo y la que se trabajo en la sesión anterior. El estudiante comprenderá que la metodología es similar.

<u>Actividad 2:</u> Se plantea una batería de ejercicios para que los alumnos practiquen los conocimientos adquiridos sobre porcentajes. Los ejercicios son:

a) *En una sopa de un restaurante, el 22% de 120 gramos de la pasta empleada es ecológica. ¿Cuánta pasta ecológica hay en el caldo?*

Respuesta: *Como es un problema de proporcionalidad directa, se aplica el método de reducción a la unidad.*

El 1% de los 120 gramos de pasta será: 120 gramos/ 100 =1,2 gramos.

Así, el 22% de pasta ecológica ascenderá a: 1,2 gramos x 22 = 26,4 gramos de pasta ecológica.

b) *Un jersey rebajado ha costado 55 euros, el 60% de su precio inicial. ¿Cuánto valía el jersey antes de la rebaja?*

Respuesta: *Como es un problema de proporcionalidad directa, se aplica el método de reducción a la unidad.*

El 1% de los 55 euros que cuesta el jersey será: 55 euros/ 60 =0,91$\hat{6}$ *euros.*

Así, el 100% del valor del jersey será: 0,91$\hat{6}$ $euros$ *x 100 = 91,6 euros.*

SESIÓN 12ª.

Repaso de los problemas que se han planteado a lo largo de la unidad. El profesor solucionará en la pizarra aquellas cuestiones que no hayan quedado suficientemente claras en el transcurso de la unidad.

SESIÓN 13ª

Prueba escrita.

b) Establece una duración aproximada.

Dada la extensión del tema, y el grado de importancia de los conceptos que se trabajan durante la unidad, se estima una duración aproximada de tres semanas. La intención es que los alumnos adquieran los conocimientos y profundicen en ellos lo suficiente como para que puedan afrontar la resolución de problemas con garantías de éxito.

I.SOBRE LA EVALUACIÓN

a) Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

PRUEBA ESCRITA. PROPORCIONES Y PORCENTAJES. 1 ESO

Problema 1.- Juan tiene que elaborar 300kg de bizcocho. En la receta de elaboración del bizcocho dice: Mezcla 80 kg de harina con 3.000 huevos y 10 kg de chocolate y obtendrás 120 kg del gran bizcocho. ¿Cuánta cantidad de harina, huevos, y de chocolate deberá utilizar Juan para elaborar el bizcocho?

Problema 2.- Juan ha adoptado de la perrera un pastor alemán. Tiene ahora cuatro perros, los tres que tenía más el pastor alemán recién adoptado. Juan se da cuenta de que solo tiene comida para que sus tres perros antiguos coman durante doce días. ¿Cuántos días aguantará la comida en la nueva situación?

Problema 3.-Pedro se ha comprado una estufa de pellets. Para abastecer la estufa, acude a una tienda donde ve tres marcas distintas de pellets. La primera marca viene en bolsas de 15 kilos con un coste de 4 euros. La segunda marca viene en bolsas de 18 kilos y cuesta 5 euros. La última opción es una marca blanca que cuesta 4,5 euros y viene en bolsas de 11,25 kilogramos. ¿Cuál es la opción más rentable para Pedro?

Problema 4.- La última temporada Susana marcó 12 goles, el 80% de todos los goles que logró su equipo, y dio 30 asistencias finales, el 60% de las asistencias finales de su equipo. ¿Cuántos goles y asistencias finales logró su equipo la temporada pasada?

Problema 5.- Juan va a repartir el total de beneficios que ha generado su empresa, 600.000 euros. El reparto se hace entre Juan y sus dos hermanos. Un abogado les dice que el reparto debe ser directamente proporcional al dinero que se invirtió en su día en la empresa. Juan aporto 5.000 euros del capital inicial, mientras sus dos hermanos aportaron, él mayor 2.750 euros y él menor 2.250 euros. ¿Cuánto dinero se llevará cada uno en el reparto?

b) ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Se adjunta un cuadro que relaciona los problemas que se presentan en la prueba escrita con los problemas y técnicas que se han trabajado en la unidad.

PROBLEMAS	CAMPO DE PROBLEMAS	TÉCNICAS
PROBLEMA 1	-Cálculo de la razón. -Estudio de la condición de proporcionalidad directa.	-Cuantificación de la razón.
	-Cálculo del valor perdido.	-Método algebraico. -Método reducción a la unidad. -Cálculo con la razón interna.
PROBLEMA 2	-Cálculo de la constante de proporcionalidad inversa.	-Cuantificación de la constante de proporcionalidad.
	-Cálculo del valor perdido. -Estudio de la condición de proporcionalidad.	-Método de reducción a la unidad.
PROBLEMA 3	-Problemas sobre comparación. -Estudio de la condición de proporcionalidad directa.	- Cuantificación de la razón.
PROBLEMA 4	-Problemas sobre porcentajes.	-Método algebraico. -Método reducción a la unidad.
PROBLEMA 5	-Repartos directamente proporcionales.	-Método algebraico. -Método reducción a la unidad.

Todos los problemas tratan de dar respuesta al criterio de evaluación 2.5 para el curso de 1º E.S.O que establece la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

c) ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

PROBLEMA 1: Entre las magnitudes kilogramos de bizcochos de chocolate y kilogramos de harina, kilogramos de chocolate y huevos existe una relación de proporcionalidad directa. Por tanto, se pueden aplicar varios métodos para su resolución:

Respuesta esperada:

- ✓ Método Reducción a la unidad: El alumno responde con las estrategias vistas del método de reducción a la unidad.

$$\frac{80 kg\ harina}{120\ kg\ bizcocho} \times 300\ kg\ bizcocho = 200\ kg\ harina$$

$$\frac{10 kg\ harina}{120\ kg\ bizcocho} \times 300\ kg\ bizcocho = 25\ kg\ harina$$

$$\frac{3000\ huevos}{120\ kg\ bizcocho} \times 300\ kg\ bizcocho = 7500\ huevos$$

- ✓ Método Algebraico: Como las magnitudes, kg de bizcocho y kg de harina/chocolate/huevos están en proporción, las razones deben ser iguales.

Kg bizcocho	300	120	120	120
Kg harina/chocolate/huevos	x	80	10	3000

$$\frac{80}{120} = \frac{x}{300} \Rightarrow 80 \times 300 = 120x \Rightarrow x = \frac{80 \times 300}{120} = 200\ kg\ harina$$

$$\frac{10}{120} = \frac{x}{300} \Rightarrow 10 \times 300 = 120x \Rightarrow x = \frac{10 \times 300}{120} = 25\ kg\ chocolate$$

$$\frac{3.000}{120} = \frac{x}{300} \Rightarrow 3.000 \times 300 = 120x \Rightarrow x = \frac{3.000 \times 300}{120} = 7.500\ huevos$$

- ✓ Método Razones internas: Si paso de hacer bizcochos de 120 kg a hacer bizcochos de 300 kg, empleo 300/120 más de recursos, luego si empleo 80 kg de harina necesitaré 300/ 120 veces más de harina, y así con el resto de ingredientes.

$$\frac{300\ kg\ bizcocho}{120\ kg\ bizcocho} \times 80\ kg\ harina = 200\ kg\ harina.$$

$$\frac{300kg\ bizcocho}{120\ kg\ bizcocho} \times 10\ \ kg\ cholotate = 25\ kg\ harina.$$

$$\frac{300\ kg\ bizcocho}{120\ kg\ bizcocho} \times 3000\ kg\ bizcocho = 7500\ huevos.$$

PROBLEMA 2: Entre la magnitud, número de perros que comen en casa de Juan, y la magnitud, número de días que aguanta la comida, existe una relación de proporcionalidad inversa. Por lo tanto, se puede utilizar el método de reducción a la unidad para la resolución del problema:

- ✓ Método Reducción a la unidad: Se calcula la constante de proporcionalidad inversa entre ambas magnitudes, 3 perros para 12 días de comida nos da $3x12 = 36$, que se interpreta como el número de días que aguantará la comida si solo hay un perro. Como en la nueva situación hay cuatro perros, la comida aguantará $36/4 = 9\ días$.

PROBLEMA 3:

- ✓ Método cuantificación de la razón: Entre las magnitudes kilogramos de pellets y dinero, en euros, existe una relación de proporcionalidad directa. Por lo tanto, calculamos la razón entre los euros y los kilogramos, razón o tanto por uno, y lo interpretamos como el dinero que cuesta un kilogramo de pellets:

$$Razón\ de\ primera\ marca \quad \frac{4\ euros}{15\ kg\ pellets} = 0{,}2\hat{6}\ euros.$$

$$Razón\ de\ segunda\ marca \quad \frac{5\ euros}{18\ kg\ pellets} = 0{,}2\hat{7}euros.$$

$$Razón\ de\ tercera\ marca\ \frac{4{,}5\ euros}{11{,}25\ kg\ pellets} = 0{,}4\ euros.$$

Por lo tanto, los pellets de la primera marca son más rentables dado que el kilogramo de este producto es más barato que los artículos de las otras dos marcas.

- ✓ Método Alternativo: Calculamos la razón entre kg y euros, y lo interpretamos como la cantidad de producto en kilogramos que se obtiene con un euro. De esta forma, el producto más rentable será aquel que presenta mayor tanto por uno.

$$Razón\ de\ primera\ marca\ \frac{15\ kg\ pellets}{4\ euros} = 3{,}75\ kg$$

$$Razón\ de\ segunda\ marca\ \frac{18\ kg\ pellets}{5\ euros} = 3{,}6\ kg$$

$$Razón\ de\ tercera\ marca\ \frac{11{,}25\ kg\ pellets}{4{,}5\ euros} = 2{,}5\ kg$$

Por lo tanto, los pellets de la primera marca son más rentables dado que con un euro podemos comprar más cantidad de producto.

PROBLEMA 4:

- ✓ Método Algebraico: Es un problema sobre porcentajes y por tanto se pueden aplicar las técnicas que se emplean con los problemas de proporcionalidad directa. De esta forma, se elabora la tabla y se establecen las proporciones:

Asistencias	**30**
porcentaje	60%

Goles	**12**
porcentaje	80%

$$\frac{12}{x} = \frac{80}{100} \Rightarrow 12 \times 100 = 80x \Rightarrow x = \frac{12 \times 100}{80} = 15\ goles.$$

$$\frac{30}{y} = \frac{30}{100} \Rightarrow 30 \times 100 = 60y \Rightarrow y = \frac{30 \times 100}{60} = 50\ asistencias.$$

- ✓ Método Reducción a la unidad: Se calcula el tanto por uno entre los goles-asistencia y los porcentajes. De esta forma, $12/80$ se interpretaría como el número de goles que suponen el 1 % del total de goles. Como el equipo marca el 100% de goles-asistencias tendremos los siguientes números para todo el equipo:

$$Número\ de\ goles: \frac{12\ goles}{80} \times 100 = 15\ goles.$$

$$Número\ de\ asistencias: \frac{30\ asistencias}{60} \times 100 = 50\ asistencias.$$

PROBLEMA 5:

- ✓ Método Reducción a la unidad: El problema consiste en repartir de forma directamente proporcional una cantidad de dinero en función de la aportación inicial de un capital. Para hacer el reparto se supone que existe una relación de proporcionalidad entre el dinero que se reparte y el que se aporta. De esta forma, se calcula la constante de proporcionalidad.

$$Cálculo\ de\ la\ constante\ de\ proporcionalidad:$$

$$\frac{600.000}{5.000 + 2.750 + 2.250} = 60\ euros = k$$

Como la constante de proporcionalidad es la cantidad de dinero que se obtiene en el reparto por un euro invertido, sabemos que por un euro que se invirtió en el capital inicial los hermanos se llevan 60 euros. Por lo tanto, como cada uno ha invertido 5000, 2750, 2250 euros, tendremos el siguiente reparto.

Juan se lleva: $k \times 5.000 = 60 \times 5000 = 300.000\ euros.$

El hermano mayor se lleva: $k \times 2.750 = 60 \times 2.750 = 165.000\ euros.$

El hermano menor se lleva: $k \times 2.250 = 60 \times 2.250 = 135.000\ euros.$

- ✓ Método Algebraico: Suponiendo que existe una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad a repartir y las unidades de reparto, se establece una proporción de razones.

Cantidad a repartir 600.000	**Euros para Juan X**	**Euros para Hermano mayor Y**	**Euros para Hermano menor Z**
Unidades a repartir 10.000	5.000	2.750	2.250

$$\frac{600.000}{10.000} = \frac{X}{5.000} \Rightarrow 600.000 \times 5.000 = 10.000X \Rightarrow X = \frac{600.000 \times 5.000}{10.000} = 300.000\ euros.$$

$$\frac{600.000}{10.000} = \frac{Y}{2.750} \Rightarrow 600.000 \times 2.750 = 10.000Y \Rightarrow Y = \frac{600.000 \times 2.750}{10.000}$$
$$= 165.000 euros.$$

$$\frac{600.000}{10.000} = \frac{Z}{2.250} \Rightarrow 600.000 \times 2.250 = 10.000Z \Rightarrow Z = \frac{600.000 \times 2.250}{10.000}$$
$$= 135.000\ euros.$$

d) ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Guía de corrección:

PROBLEMA 1: La puntuación máxima que puede obtener el alumno es de 2 puntos. Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 33% del valor de la pregunta:

- ✓ Error en operaciones entre fracciones o números decimales se penalizará con 2/9 puntos.
- ✓ Error en el desarrollo de operaciones algebraicas se penalizará con 1/9 puntos.
- ✓ Error por una mala comprensión lectora del problema se penalizará con 2/9 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 67% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no reconocer la relación de proporcionalidad (condición linealidad) entre las diferentes magnitudes se penalizará con 2/3 puntos.
- ✓ Calcula mal la razón por establecer inadecuadamente la relación, se penalizará con 2/3 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 100% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no establecer adecuadamente la proporción entre razones se penalizará con 1/2 puntos.
- ✓ Error se produce por un mal cálculo del valor perdido del problema, debido a una mala interpretación de la razón entre las magnitudes en tanto por uno, se penalizará con 1/2 puntos.

PROBLEMA 2: La puntuación máxima que puede obtener el alumno es de 2 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 33% del valor de la pregunta:

- ✓ Error en el desarrollo de operaciones entre fracciones o números decimales se penalizará con 2/9 puntos.
- ✓ Error en el desarrollo de operaciones algebraicas se penalizará con 1/9 puntos.
- ✓ Error por una mala comprensión lectora del problema se penalizará con 2/9 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 67% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no reconocer la relación de proporcionalidad entre las diferentes magnitudes se penalizará con 2/3 puntos.
- ✓ Calcula mal la constante de proporcionalidad por establecer inadecuadamente la relación, se penalizará con 2/3 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 100% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no establecer adecuadamente la proporción entre constantes se penalizará con 1/2 puntos.

Error por un mal cálculo del valor perdido del problema, debido a una mala interpretación de la constante entre las magnitudes en tanto por uno, se penalizará con 1/2 puntos.

PROBLEMA 3: La puntuación máxima que puede obtener el alumno es de 2 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 33% del valor de la pregunta:

- ✓ Error en el desarrollo de operaciones entre fracciones o números decimales se penalizará con 2/9 puntos.
- ✓ Error por una mala comprensión lectora del problema se penalizará con 2/9 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 67% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no reconocer la relación de proporcionalidad entre las diferentes magnitudes se penalizará con 2/3 puntos.

- ✓ Calcula mal la constante por establecer inadecuadamente la relación, se penalizará con 2/3 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 100% del valor de la pregunta:

- ✓ Errores en la comparación de razones, entendidas como tanto por uno (mala interpretación de la razón) se penalizará con 1/2 puntos.

PROBLEMA 4: La puntuación máxima que puede obtener el alumno es de 2 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 33% del valor de la pregunta:

- ✓ Error en el desarrollo de operaciones entre fracciones o números decimales se penalizará con 2/9 puntos.
- ✓ Error en el desarrollo de operaciones algebraicas se penalizará con 1/9 puntos.
- ✓ Error por una mala comprensión lectora se penalizará con 2/9 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 67% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no reconocer la relación de proporcionalidad (condición linealidad) entre las diferentes magnitudes se penalizará con 2/3 puntos.
- ✓ Calcula mal la razón por establecer inadecuadamente la relación, se penalizará con 2/3 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 100% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no establecer adecuadamente la proporción entre razones se penalizará con 1/2 puntos.
- ✓ Error se produce por un mal cálculo del valor perdido del problema, debido a una mala interpretación de la razón entre las magnitudes en tanto por uno, se penalizará con 1/2 puntos.

PROBLEMA 5: La puntuación máxima que puede obtener el alumno es de 2 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 33% del valor de la pregunta:

- ✓ Error en el desarrollo de operaciones entre fracciones o números decimales se penalizará con 2/9 puntos.
- ✓ Error en el desarrollo de operaciones algebraicas se penalizará con 1/9 puntos.
- ✓ Error se produce por una mala comprensión lectora se penalizará con 2/9 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 67% del valor de la pregunta:

- ✓ Error se comete por no reconocer la relación de proporcionalidad (condición linealidad) entre las diferentes magnitudes se penalizará con 2/3 puntos.
- ✓ Calcula mal la razón por establecer inadecuadamente la relación, se penalizará con 2/3 puntos.

Los errores que se presentan, a continuación, pueden penalizar hasta un máximo del 100% del valor de la pregunta:

- ✓ Error por no establecer adecuadamente la proporción entre razones se penalizará con 1/2 puntos.
- ✓ Error se produce por un mal reparto, debido a una mala interpretación de la razón entre las magnitudes en tanto por uno, se penalizará con 1/2 puntos.

BIBLIOGRAFÍA

Amparo Fernández, M. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. *Educativo siglo XXI* , 35-56.

Colera, J., & Gaztelu, I. (2010). *Matemáticas 1 ESO.* Madrid: Anaya.

D.Godino, J., & Batanero, C. (2002). Proporcionalidad. En J. D. Godino, *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Granada: Departamento didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada.

La Prova, A. (2017). *La práctica del aprendizaje cooperativo.* Madrid: Narcea.

Marcén, A. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa* .

Morales, P., & Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria* , 145-154.

Nieto, M., & Moreno, A. (2015). *Matemáticas 1 ESO.* Madrid: Savia.

Sallén, J. M., & Escolano Vizcarra, R. (2009). Propiorcionalidad aritmética, buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *SUMA* .

Sanchez, J. L., & Vera Lopez, J. (2000). *Matemáticas 1 ESO.* Estella: Oxford educacion.